

## MONITOROWANIE PROCESÓW BINARNYCH ZA POMOCĄ KART KONTROLNYCH SUM SKUMULOWANYCH

ANDRZEJ IWASIEWICZ

Katedra Metod Statystycznych  
Krakowskiej Akademii im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego  
30 -705 Kraków, ul. Gustawa Herlinga-Grudzińskiego 1  
e-mail: andrzej.iwasiewicz@interia.pl

Praca była przedstawiona przez autora na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie, 16 grudnia 2008 r.

### ABSTRACT

Andrzej Iwasiewicz, *Binary process monitoring by the cumulative sum control chart*. *Folia Aeconomica Cracoviensis* 2008–2009, 49–50: 71–90.

In the paper there have been presented some problems of the binary processes monitoring. There have been presented the monitoring of these processes by Shewhart control charts (control charts p and np) and cumulative sum control charts. Shewhart control charts are very useful if there are a possibility of a large shift in monitored parameters of process. A major disadvantage of a Shewhart control chart is that it uses only (first) the information about the process contained in the last observation and it rather ignores any information given by the entire sequence of empirical points. The cumulative control charts (cusum charts) are very effective alternatives to the Shewhart control charts. In the paper there have been presented the original modification of the cumulative sum control chart.

### KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

monitoring, binary process, binary process monitoring, control chart, Shewhart control chart, cumulative sum control chart

monitorowanie, proces binarny, monitorowanie procesu binarnego, karta kontrolna, karta kontrolna Shewharta, karta kontrolna sum skumulowanych

### 1. PROCESY BINARNE

Pod pojęciem procesu binarnego należy rozumieć każdy proces dwustanowy, czyli taki proces, w przypadku którego badane zjawisko może znajdować się

tylko w dwóch, rozłącznych i wzajemnie wykluczających się stanach. Obserwowany proces może być albo z natury dwustanowy, albo obserwator tego procesu może dokonać dychotomizacji obrazu badanego zjawiska, sprowadzając go tym samym do postaci binarnej. Niezależnie od tego, z którym z tych przypadków mamy do czynienia, do opisu stanu obserwowanego zjawiska wykorzystuje się najczęściej zero-jedynkowe zmienne diagnostyczne. Wartości tych zmiennych ( $X$ ) generowane są według następującej reguły:

$$\left. \begin{array}{l} X = 1 \text{ gdy badane zjawisko znajduje się w stanie wyróżnionym} \\ X = 0 \text{ gdy badane zjawisko nie znajduje się w stanie wyróżnionym.} \end{array} \right] \quad (1)$$

Monitorowanie procesu, nie tylko binarnego, podejmowane jest najczęściej w celu pozyskania informacji o średnim poziomie obserwowanego zjawiska, a także o jego zmienności. W przypadku procesów binarnych obydwa te zadania realizuje się poprzez śledzenie parametru:

$$p = P(X = 1), \quad (2)$$

charakteryzującego częstość pojawiania się tego stanu procesu, który w planie eksperymentu został potraktowany jako wyróżniony ( $X = 1$ ). Przypomnijmy však, że w przypadku zero-jedynkowych zmiennych losowych wartość oczekiwana i wariancja dane są następującymi wzorami:  $E(X) = p$ ,  $D^2(X) = p \times (1 - p)$ . Tak więc, znając wartość parametru  $p$ , albo uzyskane empirycznie punktowe lub przedziałowe oszacowania tej wartości, posiadamy informacje zarówno o średnim poziomie procesu, jak i o jego zmienności. Zauważmy też, że wariancja tej zmiennej losowej osiąga wartość maksymalną, a monitorowany proces najmniejszy stopień zdeterminowania przez kontrolowane uwarunkowania, gdy  $p = 0,5$ .

Przy przyjętych założeniach, formalnym modelem obserwowanego procesu  $\{X_t\}$  jest ciąg zer ( $X = 0$ ) i jedynek ( $X = 1$ ), a częstość pojawiania się tych wartości określona jest przez parametr  $p$ . W konsekwencji, również uzyskiwane empirycznie liczbowe obrazy procesu są ciągami złożonymi z zer i jedynek<sup>1</sup>. Są to zawsze ciągi skończone, podczas gdy monitorowany proces  $\{X_t\}$  może być traktowany — w zależności od szczegółowych uwarunkowań — jako ciąg skończony lub nieskończony. Jeśli w kolejnych krokach postępowania kontrolnego mamy do czynienia z pojedynczymi ocenami natężenia obserwowanego zjawiska, to rezultatem przeprowadzonych badań jest ciąg:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_t, \dots, x_k, \quad (3)$$

w którym  $x_t$  oznacza zrealizowaną wartość (zero albo jedynkę) zmiennej diagnostycznej  $X$ , w punkcie, albo przedziale, o numerze  $t$  ( $t = 1, 2, 3, \dots, k$ ). Jeśli

<sup>1</sup> Ciągi takie nazywane są niekiedy słowami binarnymi.

natomiast w kolejnych krokach postępowania kontrolnego wielokrotnie powtarzana jest ocena natężenia badanego zjawiska, to każdej wartości  $t$  odpowiada pewien zbiór zer i jedynek, będących realizacjami zmiennej diagnostycznej  $X$ :

$$x_t = \{x_{t,1}, x_{t,2}, x_{t,3}, \dots, x_{t,i}, \dots, x_{t,n_t}\}. \quad (4)$$

Ogólnym liczbowym obrazem monitorowanego procesu jest w takiej sytuacji ciąg tych zbiorów:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_k. \quad (5)$$

Zbiory  $x_t$  są najczęściej próbkami losowymi, a  $n_t$  oznacza licznosc próbek pobranej do badania w chwili (przedziale) o numerze  $t$ . Odpowiednio zorganizowana analiza tych próbek umożliwia empiryczne pozyskiwanie informacji o stanie śledzonego procesu, które pozwalają wyznaczać punktowe i przedziałowe oceny parametru  $p$  zdefiniowanego wzorem (2), a także weryfikować hipotezy dotyczące tego parametru.

## 2. KARTY KONTROLNE

Procedury statystyczne znane pod nazwą kart kontrolnych (ang. *control chart*) są nieskomplikowanymi i bardzo użytecznymi narzędziami monitorowania procesów. Służą one do rejestrowania, wstępnego przetwarzania i analizy źródłowych informacji o stanie obserwowanego procesu, a ich zadaniem jest wykrywanie systematycznych (nielosowych) zmian w przebiegu tego procesu. Najczęściej, aczkolwiek nie zawsze, karta kontrolna jest elementem ujemnego (regulacyjnego) sprzężenia zwrotnego. W takiej sytuacji wykryta zmiana w przebiegu procesu, będąca nielosowym odchyleniem od zadanej normy, skutkuje emisją sygnału o rozregulowaniu procesu, a sygnał ten uruchamia odpowiednie działania regulacyjne. Takie usytuowanie karty kontrolnej w systemie monitorowania procesu nie jest jej jedynym zastosowaniem. Karta kontrolna może również funkcjonować w układzie dodatniego (deregulacyjnego) sprzężenia zwrotnego, a może być także wykorzystana do biernego śledzenia procesu, bez możliwości wpływania na jego przebieg. Prezentowane w literaturze przedmiotu karty kontrolne można klasyfikować według kilku kryteriów. Rozróżnia się więc przede wszystkim karty jednowymiarowe i wielowymiarowe. Podstawowe znaczenie praktyczne mają karty jednowymiarowe, stosowane w przypadku jednokryterialnej oceny badanych zjawisk. Takim kartom kontrolnym poświęcone są w całości przedstawione poniżej rozważania. Nie zmienia to oczywiście faktu, że bardzo często zachodzi potrzeba ocen wielokryterialnych. W takich sytuacjach definiuje się często jednowymiarowe, agregatywne zmienne diagnostyczne, charakteryzujące w sposób syntetyczny obserwowane, wielowymiarowe zjawisko. Niekiedy wykorzystuje się do tego celu zero-jedynkowe

zmienne losowe, a w konsekwencji obserwowany proces sprowadza się do postaci binarnej. Pełniejszy obraz monitorowanego procesu uzyskuje się stosując wielowymiarowe karty kontrolne, wśród których podstawową rolę odgrywają dwuwymiarowe karty kontrolne ( $T^2$ ) Hotellinga (Montgomery, 2005). Podstawą klasyfikacji kart kontrolnych są także teoretyczne uwarunkowania ich funkcjonowania. Kierując się tym kryterium rozróżnia się karty kontrolne zaproponowane przez W. A. Shewharta, których teoretyczną bazę stanowi obecnie klasyczna teoria weryfikacji hipotez statystycznych<sup>2</sup> oraz karty kontrolne sum skumulowanych wykorzystujące sposób rozumowania zaproponowany przez A. Walda dla potrzeb analizy sekwencyjnej<sup>3</sup>. Innym, bardzo ważnym kryterium klasyfikacji kart kontrolnych jest ich zdolność do akceptacji monitorowanego procesu. Historycznie wcześniejsze są karty kontrolne, zarówno Shewharta, jak i sum skumulowanych, które nie posiadają tej zdolności. Potrzeby praktyki wymusiły jednak modyfikacje tych kart. Te zmodyfikowane karty kontrolne pozwalają akceptować obserwowany proces, a nie tylko dyskwalifikować go lub orzekać, że nie ma podstaw do dyskwalifikacji. Tak zmodyfikowane karty kontrolne są szczególnie użyteczne w sytuacjach, w których nie można uchylić się od odpowiedzi na pytanie: czy obserwowany proces przebiega prawidłowo, czy też wymaga korekty? Z taką sytuacją mamy do czynienia — na przykład — w działaniach związanych z audytem. Podstawowa część przedstawionych poniżej rozważań poświęcona jest monitorowaniu procesów z wykorzystaniem procedur sekwencyjnych. Omówienie funkcjonowania kart kontrolnych Shewharta stanowi niezbędne wprowadzenie do tego podstawowego nurtu rozważań.

### 3. KARTY KONTROLNE SHEWHARTA

Najwcześniejsze historycznie, najbardziej znane i najczęściej stosowane są karty kontrolne pomysłu W.A. Shewharta. W latach dwudziestych ubiegłego stulecia przedstawił on i zrealizował koncepcję systemu wykorzystującego informacje generowane przez karty kontrolne do sterowania procesami wytwórczymi w celu zapewnienia wymaganego poziomu jakości wykonania<sup>4</sup>. Słowo

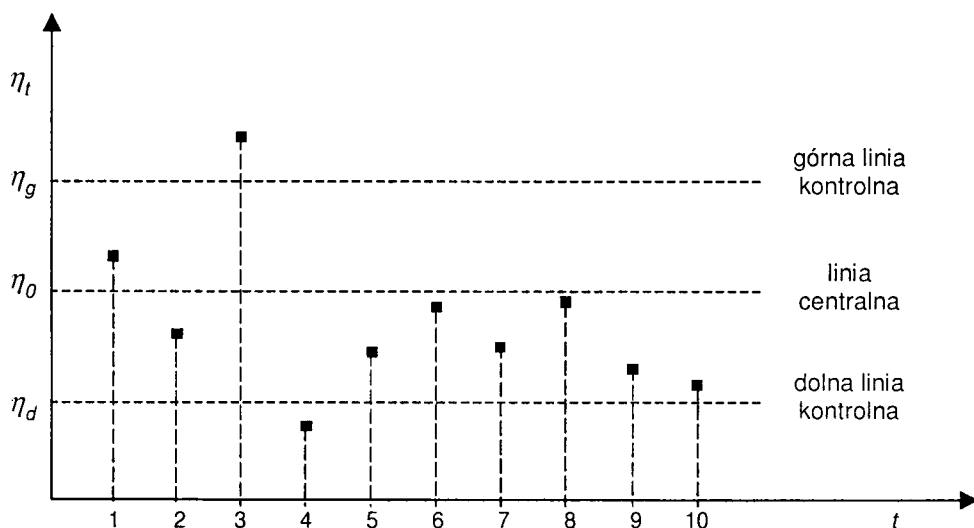
---

<sup>2</sup> Walter Andrew Shewhart (1891–1967), amerykański matematyk i statystyk, prekursor stosowania metod statystycznych dla potrzeb zarządzania jakością. Dodać należy, że w czasie gdy W. A. Shewhart pracował nad swoim systemem sterowania procesem z wykorzystaniem kart kontrolnych, teoria weryfikacji hipotez statystycznych nie była jeszcze ugruntowana. Powstawała ona niemal równoległe do prac W. A. Shewharta i była dziełem Jerzego Sławy-Neymana (1894–1981) oraz Egon Pearsona (1895–1980) (Rinne i Mittag, 1988).

<sup>3</sup> Abraham Wald (1902–1950), statystyk amerykański (Rinne i Mittag, 1988)

<sup>4</sup> Pierwszy taki system został uruchomiony 16 maja 1924 w Stanach Zjednoczonych (Juran, 1962).

„karta” (ang. *chart*) nieprzypadkowo znalazło się w nazwie omawianych procedur. Centralnym elementem karty kontrolnej jest odpowiednio skonstruowany diagram przeglądowy, służący do graficznego przedstawienia przebiegu śledzonego procesu. W przypadku kart kontrolnych zaproponowanych przez W. A. Shewharta, a także innych kart kontrolnych, diagram ten ma postać przedstawioną schematycznie na rycinie 1. Na osi poziomej odkładany jest numer próbki losowej pobranej z procesu, albo czas mierzony na skali porządkowej ( $t$ ). Na osi pionowej odkłada się natomiast wartości obserwowanej charakterystyki z próby  $\eta_t$ , przy czym szczegółowa postać tej charakterystyki zależy od różnego rodzaju uwarunkowań, do których w szczególności należy zaliczyć cel badania oraz rodzaj monitorowanego procesu. Równoległe do osi  $t$ , na poziomie  $\eta_0$ , wykreśla się linię centralną (ang. *center line*), odpowiadającą najczęściej, ale nie zawsze, średniemu poziomowi obserwowanego procesu. Poniżej i powyżej linii centralnej wykreśla się linie kontrolne, które mogą być bądź to granicami regulacji procesu (ang. *upper control limit*, *lower control limit*), bądź też mogą służyć do wykrywania korzystnych zmian w procesie. Na tak przygotowany diagram przeglądowy nanosi się kolejne punkty empiryczne ( $t$ ,  $\eta_t$ ), tworzące ciąg nazywany śladem procesu.



Ryc. 1. Diagram przeglądowy karty kontrolnej Shewharta

W zamyśle W. A. Shewharta analiza tego ciągu miała być podstawą diagnoz dotyczących stanu obserwowanego procesu, a także decyzji sterujących jego przebiegiem. Operacje numeryczne miały być sprowadzone do niezbed-

nego minimum. Przyczyna takiego potraktowania problemu wydaje się oczywista, zwłaszcza jeśli karty kontrolne miały funkcjonować w warunkach warsztatowych, na niskich szczeblach zarządzania. Należy pamiętać, że w latach dwudziestych ubiegłego stulecia, a także w kilku następnych dekadach, nie były dostępne te środki obliczeniowe, którymi dysponujemy obecnie. Był to świat bez kalkulatorów elektronicznych i bez komputerów. Dlatego też zapewne W. A. Shewhart zaproponował taki tok przetwarzania i analizy informacji źródłowych, w którym podstawowe oceny i decyzje formułowane są na podstawie graficznej analizy problemu. W świetle obecnej wiedzy o problemach wnioskowania statystycznego karty kontrolne Shewharta można rozważać jako sekwencje odpowiednich testów istotności. Dotyczy to jednak tylko takich sytuacji, gdy — z jakichkolwiek powodów — rola karty kontrolnej zredukowana jest do generowania i emisji tak zwanych punktowych sygnałów o rozregulowaniu monitorowanego procesu. Sygnał taki emitowany jest wówczas, gdy pojedynczy punkt empiryczny  $(t, \eta_t)$  znajdzie się poza obszarem ograniczonym przez linie kontrolne, będące granicami regulacji procesu. W sytuacji pokazanej na rycinie 1 sygnałami takimi są punkty  $(3, \eta_3)$  oraz  $(4, \eta_4)$ . Każdy z tych sygnałów równoważny jest decyzji o odrzuceniu hipotezy zerowej za pomocą odpowiedniego testu istotności. Gdyby mianowicie na podstawie pojedynczego zbioru postaci  $(4)$  obliczyć wartość stosownej funkcji testowej i porównać ją z odpowiednią wartością krytyczną, to decyzja byłaby taka sama jak w przypadku sygnału punktowego wyemitowanego przez kartę kontrolną.

Analizując funkcjonowanie diagramu przeglądowego, przedstawionego na rycinie 1 nietrudno zauważyć, że karta kontrolna umożliwia nie tylko emisję sygnałów punktowych, ale stwarza także możliwość wykrywania objawów rozregulowania procesu poprzez analizę ciągu kolejnych punktów empirycznych  $(t, \eta_t)$ , tworzących ślad procesu. Celem tej analizy jest identyfikacja takich sekwencji (serii) punktów empirycznych, których pojawienie się w śladzie uregulowanego procesu, a więc przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, jest bardzo mało prawdopodobne. Gdyby — na przykład — przyjąć, że w sytuacji przedstawionej na rycinie 1 obserwowana charakterystyka z próby  $(\eta)$  jest zmienną losową o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa, weryfikowana hipoteza zerowa ma postać  $H_0 : E(\eta) = \eta_0$ , a prawdopodobieństwo wyemitowania fałszywego sygnału o rozregulowaniu procesu ustalono na poziomie  $\alpha = 0,05$ , to ciąg sześciu punktów empirycznych  $(5, \eta_5)$ ,  $(6, \eta_6)$ ,  $(7, \eta_7)$ ,  $(8, \eta_8)$ ,  $(9, \eta_9)$ ,  $(10, \eta_{10})$  jest sygnałem sekwencyjnym (seryjnym), mimo że żaden z tych punktów, traktowany z osobna, nie wskazuje na rozregulowanie procesu. Wszystkie te punkty empiryczne leżą poniżej linii centralnej odpowiadającej wartości oczekiwanej zmiennej diagnostycznej. Jeśli są to niezależne oceny badanego zjawiska, to z symetrii rozkładu normalnego względem wartości średniej wynika, że prawdopodobieństwo przypadkowego ukształtowania się analizowanej sekwencji wynosi  $(1/2)^6 = 0,0156 < \alpha = 0,05$ . Jest to

konieczny i wystarczający warunek uznania analizowanego ciągu za sekwencyjny sygnał o rozregulowaniu procesu<sup>5</sup>.

#### 4. MONITOROWANIE PROCESÓW BINARNYCH Z ZASTOSOWANIEM KART KONTROLNYCH SHEWHARTA

Skupmy uwagę na przypadku, gdy w kolejnych krokach postępowania kontrolnego pobierane są próbki losowe o licznosci  $n_t$ , a więc na przypadku, gdy empirycznym obrazem monitorowanego procesu jest ciąg postaci (5). Obliczając wartości:

$$z_t = \sum_{i=1}^{n_t} x_{t,i}, \quad (6)$$

uzyskujemy informację o liczbie elementów wyróżnionych ( $X = 1$ ) w kolejnych ( $t = 1, 2, 3, \dots, k$ ) zbiorach postaci (4). Jeśli próbki losowe pobierane do badania w kolejnych krokach postępowania kontrolnego są jednakowo liczne, to wartości  $z_t$  obliczone według wzoru (6) mogą być bezpośrednio wykorzystane do monitorowania procesu za pomocą karty kontrolnej. W takiej sytuacji należy posłużyć się kartą kontrolną z (ang. *control chart np*). Jeśli natomiast kolejno pobierane próbki mają różne licznosci, to wartości  $z_t$  obliczanych według wzoru (6) nie wykorzystuje się bezpośrednio do monitorowania procesu za pomocą klasycznej karty kontrolnej Shewharta. W celu zapewnienia porównywalności uzyskiwanych ocen cząstkowych, oblicza się wówczas wartości frakcji elementów wyróżnionych ( $X = 1$ ), w kolejnych zbiorach postaci (4):

$$w_t = \frac{z_t}{n_t} \quad (7)$$

Mając te wartości można podjąć monitorowanie procesu za pomocą karty kontrolnej  $w$  (ang. *control chart p*).

W celu uściślenia dalszych rozważań ustalmy uwagę na przypadku, gdy stan wyróżniony ( $X = 1$ ) jest niepożądanym (albo niekorzystnym) stanem monitorowanego procesu. W takiej sytuacji proces jest uregulowany (przebiega zgodnie z oczekiwaniami), gdy  $p \leq p_0$ , natomiast jest rozregulowany (nie przebiega on zgodnie z oczekiwaniami), gdy  $p > p_0$ , przy czym  $p_0$  oznacza najgorszy, ale jeszcze dopuszczalny poziom procesu (ang. *Acceptable Process Level* — APL). Jeśli taki proces byłby monitorowany za pomocą wspomnianej powyżej karty kontrolnej  $z$ , albo karty kontrolnej  $w$ , to w każdym kroku postępowania kontrolnego weryfikowana byłaby hipoteza zerowa:

<sup>5</sup> W normie PN-ISO 8258+AC1 wyróżniono siedem typów takich sygnałów seryjnych (sekwencyjnych), oprócz podstawowego sygnału punktowego. Problem ten omówiono również w pracy (Iwasiewicz i Stefanów, 2001).

$$H_0: p \leq p_0. \quad (8)$$

wobec hipotezy alternatywnej:

$$H_1: p > p_0. \quad (9)$$

W rozważanym przypadku granicami regulacji procesu byłyby tylko górne linie kontrolne, natomiast dolne linie kontrolne można by wykorzystać do wykrywania objawów korzystnych zmian w obserwowanym procesie<sup>6</sup>. W przypadku karty kontrolnej z granica regulacji dana jest wzorem:

$$z_g = n \times p_0 + u_\alpha \times \sqrt{n \times p_0 \times (1 - p_0)}. \quad (10)$$

Stosując natomiast kartę kontrolną  $w$ , granicę regulacji procesu wyznaczamy według wzoru:

$$w_g = p_0 + u_\alpha \times \sqrt{\frac{p_0 \times (1 - p_0)}{n}}. \quad (11)$$

Nietrudno zauważyć, że obydwa te równania wynikają z prostego przekształcenia funkcji testowej odpowiedniego testu istotności, który można zastosować do weryfikacji sformułowanej powyżej hipotezy zerowej, w kolejnych krokach postępowania kontrolnego, traktowanych z osobna<sup>7</sup>. W konkretnym przypadku jest to test  $u$ , o następującej funkcji testowej:

$$u_0 = \frac{\frac{z}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1 - p_0)}{n}}} = \frac{w - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1 - p_0)}{n}}}. \quad (12)$$

W rozważanym powyżej przypadku emisja sygnału następuje wówczas, gdy  $z_t > z_g$ , albo  $w_t > w_g$ . Obydwa te sygnały równoważne są decyzji o odrzuceniu hipotezy zerowej (8) na korzyść hipotezy alternatywnej (9), gdy wartość  $u_0$  obliczona na podstawie wzoru (12) spełnia nierówność  $u_0 > u_\alpha$ . W każdym z tych przypadków prawdopodobieństwo popełnienia błędu jest takie samo i wynosi  $\alpha$ .

---

<sup>6</sup> Wyczerpujący opis funkcjonowania kart kontrolnych Shewharta stosowanych w przypadku procesów binarnych przedstawiono w wielu podręcznikach; zob. np. Montgomery, 2005; Iwasiewicz, 1985, 1999, 2005.

<sup>7</sup> Przegląd podstawowych testów istotności zainteresowany Czytelnik znajdzie w każdym obszerniejszym podręczniku statystyki; zob. np. Iwasiewicz i Paszek, 2004.



## 5. SEKWENCYJNE PROCEDURY MONITOROWANIA PROCESÓW

Możliwość identyfikacji i analizy nielosowych sekwencji punktów empirycznych ( $t, \eta_t$ ) w śladzie procesu jest tą właściwością operacyjną karty kontrolnej Shewharta, która odróżnia ją od zwykłych sekwencji testów istotności. Możliwość ta zaowocowała pojawieniem się różnego rodzaju sekwencyjnych procedur kontrolnych. Należy tu przede wszystkim wymienić kartę kontrolną średnich ruchomych (ang. *moving average control chart* — MA chart). Karta ta może być stosowana albo jako samodzielna i odrębna procedura monitorowania procesu, albo jako dodatkowy segment standardowej karty kontrolnej Shewharta. W takiej sytuacji diagram przeglądowy standardowej karty kontrolnej wyposaża się dodatkowo w tor kontrolny służący do rejestrowania i analizy średnich ruchomych. Sygnały pojawiające się na tym torze nazywane są zwykle sygnałami z połączonych próbek. Takie postępowanie pozwala nie tylko na sprawniejsze wykrywanie sygnałów sekwencyjnych w śladzie procesu, ale wzmacnia również selektywność procedury, albowiem formułowane oceny oparte są na próbkach o zwielokrotnionej liczności. Na uwagę zasługuje rola, jaką karta kontrolna średnich ruchomych odgrywa w przypadku monitorowania procesów giełdowych. Ważnym instrumentem wykorzystywanym do monitorowania tych procesów są tak zwane wstęgi Bollingera (ang. *Bollinger bands*). Wstęga taka jest zmodyfikowaną kartą kontrolną średnich ruchomych, przy czym modyfikacje dotyczą sposobu wyznaczania zarówno linii centralnej, jak i linii kontrolnych. Wszystkie elementy procedury są tu wyznaczane na podstawie bieżąco pozyskiwanych informacji o stanie monitorowanego procesu, a nie na podstawie wartości postulowanych, jak w przypadku klasycznych kart kontrolnych Shewharta. Jak już wspomniano powyżej, teoretyczną podstawę kart kontrolnych Shewharta stanowi teoria testów istotności. Testy te — w standardowej postaci — nie służą do przyjmowania weryfikowanych hipotez zerowych. Za pomocą testu istotności można albo odrzucić hipotezę zerową przy określonym prawdopodobieństwie popełnienia pomyłki ( $\alpha$ ), albo orzec, że nie ma podstaw do jej odrzucenia. Nie można natomiast przyjąć (zaakceptować) hipotezy zerowej, albowiem prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju ( $\beta$ ), polegającego na przyjęciu fałszywej hipotezy zerowej, pozostaje poza bezpośrednią kontrolą. Każdy standardowy test istotności można wprawdzie przekształcić w taki sposób, by istniała możliwość przyjmowania weryfikowanych hipotez zerowych, ale znacznie efektywniejszą metodą konstruowania takich testów jest analiza sekwencyjna. Jest to metoda efektywniejsza przede wszystkim w sensie niezbędnej liczności próbki, a więc również w sensie kosztów monitorowania procesu. Teoria sekwencyjnych procedur weryfikacji hipotez, zaproponowana przez A. Walda, stała się obecnie teoretyczną podstawą dla nowego rodzaju kart kontrolnych, a mianowicie kart kontrolnych sum skumulowanych (ang. *cumulative-sum control chart*, *cusum control chart*), mimo że początkowe prace w tym zakresie nie odwoływały się do tej teorii.

## 6. PROCEDURY KONTROLNE UMOŻLIWIAJĄCE AKCEPTACJĘ MONITOROWANEGO PROCESU BINARNEGO

W celu utrzymania ciągłości rozumowania pozostaniemy przy przyjętych powyżej założeniach w odniesieniu merytorycznej natury obserwowanego procesu binarnego. W dalszym ciągu będziemy mianowicie zakładać, że wyróżniony stan badanego zjawiska ( $X = 1$ ) jest stanem nacechowanym negatywnie i że — w konsekwencji — zbiór dopuszczalnych poziomów procesu ( $p$ ) ma postać przedziału  $[0; p_0]$ . Tak więc, proces jest uregulowany (przebiega zgodnie z oczekiwaniami) gdy  $p \leq p_0$ , natomiast wymaga on regulacji (korekty) gdy  $p > p_0$ . Jeśli — w rozważanej sytuacji — do monitorowania procesu wykorzystywana jest procedura bez możliwości akceptacji procesu, a więc np. któraś ze wspomnianych powyżej klasycznych kart kontrolnych Shewharta ( $z$  albo  $w$ ), to weryfikowana hipoteza zerowa ma postać (8), natomiast treść hipotezy alternatywnej wyrażona jest nierównością (9). Jeśli chcemy uzyskać możliwość akceptacji monitorowanego procesu, to hipotezy te muszą być odpowiednio zmodyfikowane. Sformułujemy je następująco:

$$H_0: p = p_0 \quad (13)$$

$$H_1: p = p_0 + \Delta p = p_1, \quad (14)$$

przy czym  $\Delta p > 0$ .

Każda z tych hipotez może być odrzucona na korzyść hipotezy konkurencyjnej. Odrzucenie hipotezy zerowej (13) na korzyść hipotezy alternatywnej (14) skutkuje emisją sygnału o rozregulowaniu procesu, a prawdopodobieństwo emisji sygnału fałszywego nie przekracza przyjętej wstępnie, dowolnie małej, dodatniej wartości  $\alpha$ . Odrzucenie hipotezy alternatywnej (14) na korzyść hipotezy zerowej (13) oznacza akceptację monitorowanego procesu. Prawdopodobieństwo fałszywego sygnału nie przewyższa w tym przypadku wstępnie przyjętej, dowolnie małej, dodatniej wartości  $\beta$ .

Zauważmy, że — analogicznie jak poprzednio — monitorowany proces traktujemy jako rozregulowany, gdy  $p > p_0$ . Godzimy się jednak na to, by wystarczająco pewny sygnał o rozregulowaniu pojawiał się wówczas, gdy:

$$p > p_0 + \Delta p = p_1. \quad (15)$$

Przedział  $(p_0; p_1)$ , o długości  $p_1 - p_0 = \Delta p > 0$ , należy interpretować jako przedział decyzji niepewnych. Są one niepewne w tym sensie, że w przedziale  $(p_0; p_1)$  mogą pojawić się sygnały o akceptacji lub rozregulowaniu monitorowanego procesu z prawdopodobieństwami znacznie różniącymi się od przyjętych wartości  $\alpha$  i  $\beta$ . Wartość różnicy  $p_1 - p_0 = \Delta p$  deklarowana jest na podstawie przesłanek merytorycznych, a nie statystycznych. Jest to takie odchylenie rzeczywistego poziomu procesu ( $p$ ) od zadanej wartości  $p_0$ , które merytorycznie,

a nie statystycznie, można uznać za nieistotne. Konieczność definiowania przedziału decyzji niepewnych jest naturalną konsekwencją ciągłości funkcji mocy albo funkcji operacyjno-charakterystycznej omawianej procedury, w całym przedziale zmienności parametru  $p$ , czyli w przedziale  $[0; 1]$ <sup>8</sup>. Ciągłość tych funkcji sprawia, że w badaniach niewyczerpujących jakakolwiek skończona liczność próbki nie wystarcza do odróżnienia stanu  $p \leq p_0$  od stanu  $p > p_0$ , przy wystarczająco małych wartościach  $\alpha$  i  $\beta$ . Również w badaniach wyczerpujących odróżnienie tych stanów jest wątpliwe ze względu na możliwość występowania błędów kwalifikacji (diagnozowania), zob. Iwasiewicz, 2005–2006.

Sformułowane powyżej uwagi o konstruowaniu procedur kontrolnych umożliwiających akceptację monitorowanego procesu dotyczą zarówno procedur uzyskiwanych w rezultacie odpowiedniej modyfikacji kart kontrolnych typu Shewharta, jak i procedur sekwencyjnych<sup>9</sup>. Przedstawione poniżej rozważania dotyczą w całości procedur sekwencyjnych, w przypadku których istnieje możliwość istotnego ograniczenia liczności próbki, co jest bardzo ważne z punktu widzenia kosztów monitorowania procesu. W przypadku zmodyfikowanych kart kontrolnych Shewharta możliwości takie są bardzo ograniczone.

## 7. KLASYCZNA PROCEDURA SEKWENCYJNA

Przedstawione poniżej rozważania dotyczą sytuacji, gdy w kolejnych krokach postępowania kontrolnego badaniu poddawane są pojedyncze elementy śledzonego procesu. Rezultatem badania jest wówczas ciąg zer i jedynek postaci (3). Ciąg ten jest stopniowo wydłużany, stosownie do potrzeb badania, a jego każdorazowa długość ( $k$ ) jest tożsama z licznością próbki ( $k = n$ ).

Jeśli ustalone są wartości  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p_0$  i  $p_1$ , to warunek kontynuowania obserwacji, czyli wydłużania ciągu (3), przedstawia się następująco:

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} < \frac{\prod_{t=1}^n p_1^{x_t} q_1^{1-x_t}}{\prod_{t=1}^n p_0^{x_t} q_0^{1-x_t}} < \frac{1 - \beta}{\alpha}, \quad (16)$$

przy czym  $q_0 = 1 - p_0$  oraz  $q_1 = 1 - p_1$ , natomiast  $x_t$  jest zrealizowaną wartością (zerem albo jedynką) zmiennej diagnostycznej  $X$ , w kolejnym,  $t$ -tym kroku postępowania kontrolnego.

Jeśli obserwowaną charakterystyką z próby jest suma zrealizowanych wartości zmiennej diagnostycznej  $X$ , to w kolejnych krokach postępowania oblicza się wartości:

<sup>8</sup> Wyczerpujące omówienie tego problemu zainteresowany Czytelnik znajdzie w pracy: Iwasiewicz, 1999.

<sup>9</sup> Opis takich modyfikacji przedstawiono w pracach: Major, 1997; Iwasiewicz, 2001.

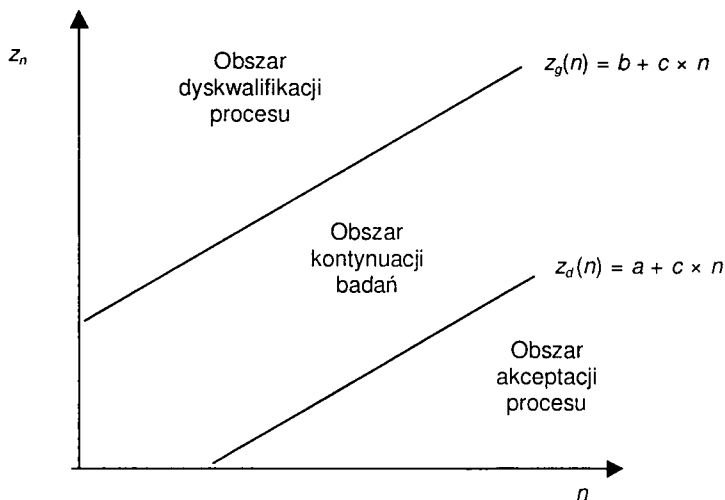
$$z_t = \sum_{i=1}^n x_i, \quad (17)$$

przy czym  $n = 1, 2, 3, \dots$ , natomiast  $t = 1, 2, 3, \dots, n$ .

W graficznej wersji omawianej procedury obliczanie tej sumy przebiega według następującego schematu:

$$\begin{aligned} t = 1: & \quad z_1 = x_1 \\ t = 2: & \quad z_2 = z_1 + x_2 \\ t = 3: & \quad z_3 = z_2 + x_3 \\ & \quad \dots \\ t = n: & \quad z_n = z_{n-1} + x_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Obliczone w ten sposób wartości sumy (17) nanosi się na diagram przeglądowy przedstawiony schematycznie na rycinie 2.



Ryc. 2. Diagram przeglądowy klasycznej sekwencji procedury kontrolnej

Równania linii kontrolnych zaznaczonych na tym rysunku wynikają z nierówności (16). Odpowiednie przekształcenia przedstawiają się następująco:

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{p_1^{z_n} q_1^{n-z_n}}{p_0^{z_n} q_0^{n-z_n}} < \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad (19)$$

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{z_n} \left( \frac{q_1}{q_0} \right)^{n-z_n} < \frac{1-\beta}{\alpha}. \quad (20)$$

Po zlogarytmowaniu tej nierówności i dalszych przekształceniach warunków kontynuowania badań można zapisać następująco:

$$z_d(n) = a + c_n < z_n < b + c_n = z_g(n), \quad (21)$$

gdzie:

$$c = \frac{\ln \frac{q_0}{q_1}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} > 0, \quad (22)$$

$$a = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} < 0, \quad (23)$$

$$b = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} > 0. \quad (24)$$

Jeśli spełniona jest nierówność (21), to przechodzi się do badania następnego elementu monitorowanego procesu, bez podejmowania jakichkolwiek decyzji w odniesieniu do hipotez (13) i (14). Jeśli:

$$z_n \leq z_d(n) = a + c \times n, \quad (25)$$

to przyjmujemy hipotezę zerową (13), a prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym, że w rzeczywistości prawdziwa jest hipoteza alternatywna (14) nie przekracza przyjętej wartości  $\beta$ . Jeśli natomiast:

$$z_n \geq z_g(n) = b + c \times n, \quad (26)$$

to przyjmujemy hipotezę alternatywną (14), a prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym, że w rzeczywistości prawdziwa jest hipoteza zerowa (13) nie przekracza przyjętej wartości  $\alpha$ . Przedstawione postępowanie można realizować w formie algorytmu graficznego, za pomocą diagramu przeglądowego przedstawionego na rycinie 2, albo algorytmu numerycznego, przy wykorzystaniu odpowiedniej tablicy decyzyjnej.

## 8. KARTA KONTROLNA SUM SKUMULOWANYCH

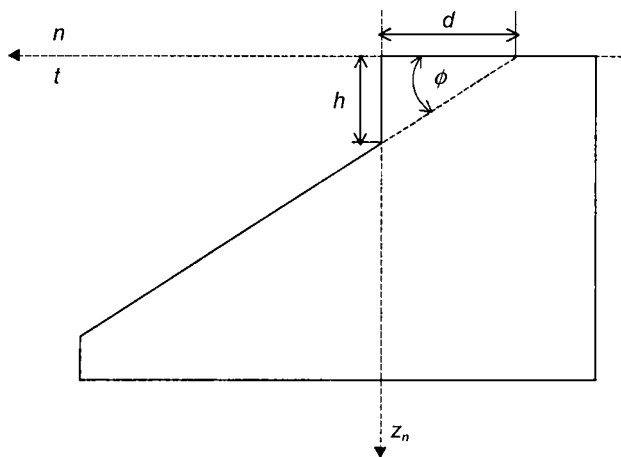
Kartę kontrolną sum skumulowanych można rozważać jako klasyczną procedurę sekwencyjną realizowaną wstecznie. W graficznej wersji procedury, na diagram przeglądowy wykreślony w układzie współrzędnych  $(n0z_n)$  nanosi się kolejne sumy skumulowane  $z_n$  obliczane według następującego schematu:

$$\begin{aligned}
 t = 0: & \quad z_0 = x_0 = 0 \\
 t = 1: & \quad z_1 = z_0 + x_1 \\
 t = 2: & \quad z_2 = z_1 + x_2 \\
 t = 3: & \quad z_3 = z_2 + x_3 \\
 & \quad \dots \quad \dots \\
 t = n: & \quad z_n = z_{n-1} + x_n.
 \end{aligned} \tag{27}$$

W celu zachowania ciągłości rozumowania pozostajemy więc przy założeniu, że podstawą analizy jest ciąg punktów empirycznych postaci (3). Oznacza to, że w każdym kroku postępowania pobierana jest do badania jednoelementowa próbka losowa ( $n_t = 1$ ). W konsekwencji, każdorazowo mamy  $t = n$ . Należy podkreślić, że do sekwencji (27) włączony jest początek układu współrzędnych, co nie było konieczne w przypadku klasycznej procedury sekwencyjnej; zob. wzór (18). Dołączenie wartości  $x_0 = 0$  do sekwencji sum skumulowanych nie zmienia oczywiście wartości tej sumy:

$$z_n = \sum_{t=0}^n x_t = \sum_{t=1}^n x_t. \tag{28}$$

Każdy punkt  $(n, z_n)$ , kończący w kolejnym kroku postępowania kontrolnego sekwencję (27), traktuje się jako początek obróconego o  $180^\circ$  układu współrzędnych. W takiej sytuacji wykreślanie linii kontrolnych jest rozwiązaniem nieracjonalnym. Linie kontrolne zastępowane są maskownicą przesuwaną na płaszczyźnie rysunku, w miarę wydłużania się śladu procesu i sekwencji (27). W standardowych wersjach tej procedury obszar kontynuacji badań łączony jest z obszarem przyjęć hipotezy zerowej. W konsekwencji, do wyznaczania



Ryc. 3. Maskownica stosowana w procedurze bez możliwości akceptacji procesu

parametrów maskownicy, której schemat pokazano na rycinie 3, wykorzystuje się tylko górną linię kontrolną klasycznego schematu sekwencyjnego<sup>10</sup>.

Uwzględniając podane powyżej wzory (21), (22) i (24) równanie górnej linii kontrolnej w klasycznym schemacie sekwencyjnym można zapisać następująco:

$$z_s(n) = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} + \frac{\ln \frac{q_0}{q_1}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} \times n. \quad (29)$$

W konsekwencji połączenia obszaru przyjęć hipotezy zerowej z obszarem kontynuacji badań przyjmuje się  $\beta = 0$ . Mamy więc:

$$z_s(n) = \frac{\ln \frac{1}{\alpha}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} + \frac{\ln \frac{q_0}{q_1}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} \times n. \quad (30)$$

W celu uzyskania wartości parametru  $d$  maskownicy należy wyznaczyć pierwiastek tego równania:

$$n^* = \frac{\ln \alpha}{\ln \frac{q_0}{q_1}}.$$

Uwzględniając fakt, że parametry maskownicy wyznaczane są w układzie współrzędnych obróconym o 180° mamy:

$$d = -n^* > 0. \quad (31)$$

Drugi parametr maskownicy, czyli tangens kąta nachylenia czynnej krawędzi maskownicy względem osi odciętych ( $c = \tan \varphi$ ) dany jest wzorem (22).

Mając wartości parametrów  $c$  i  $d$  można skonstruować algorytm numeryczny, formalnie równoważny przedstawionemu powyżej algorytmowi graficznemu, a jednocześnie nie wymagający sporządzenia maskownicy i odpowiedniego diagramu przeglądowego. Zastosowanie algorytmu numerycznego wymaga natomiast skonstruowania odpowiedniej tablicy obliczeniowej i wyznaczenia wartości dodatkowego parametru  $h$ , pełniącego rolę wartości krytycznej dla sum skumulowanych, obliczanych w kolejnych krokach postępowania kontrolnego. Wartość parametru  $h$  oblicza się według wzoru:

<sup>10</sup> Wyczerpujące omówienie funkcjonowania standardowych kart kontrolnych sum skumulowanych zainteresowany Czytelnik znajdzie w pracach: Montgomery, 2005; Iwasiewicz 1985, 1999.

$$h = c \times d = -\frac{\ln \alpha}{\ln \frac{q_0}{q_1}} \times \frac{\ln \frac{q_0}{q_1}}{\ln \frac{p_1 \times q_0}{p_0 \times q_1}} = -\frac{\ln \alpha}{\ln \frac{p_1 \times q_0}{p_0 \times q_1}}. \quad (32)$$

Dalsze postępowanie przebiega według przedstawionego poniżej schematu:

1. Każdą uzyskaną empirycznie wartość  $x_t$  (0 albo 1) porównuje się z wartością parametru  $c$ . Jeśli  $x_t \leq c$ , a więc jeśli  $x_t = 0$ , to nie podejmuje się żadnych działań, a po przejściu do następnego, losowo wybranego punktu na osi czasu generuje się kolejną wartość  $x_t$ <sup>11</sup>. Jeśli natomiast spełniona jest nierówność  $x_t > c$ , a więc jeśli  $x_t = 1$ , to uruchamia się licznik indeksu operacyjnego ( $j = 1$ ) i rozpoczyna się obserwację sekwencji, która może doprowadzić do odrzucenia hipotezy zerowej (13) na korzyść hipotezy alternatywnej (14).

2. W tym celu oblicza się wartość sumy skumulowanej:

$$D_r = \sum_{j=1}^r (x_{tj} - c), \quad (33)$$

gdzie:  $t$  — indeks bieżący,  $j$  — indeks operacyjny,  $r$  = największa w danym momencie wartość indeksu operacyjnego ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ).

3. Sygnał o rozregulowaniu monitorowanego procesu emitowany jest wówczas, gdy spełniona jest nierówność:

$$D_r \geq h. \quad (34)$$

Oznacza to odrzucenie hipotezy zerowej (13) na korzyść hipotezy alternatywnej (14), a prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym, że jest to sygnał fałszywy nie przekracza przyjętej wartości  $\alpha$ . W konsekwencji powinny być podjęte działania zmierzające do przywrócenia procesowi poprawnego przebiegu. Emisja sygnału o rozregulowaniu procesu kończy obserwowaną sekwencję. Następuje zerowanie licznika indeksu operacyjnego ( $j = 0$ ).

4. Śledzenie rozpoczętej sekwencji kończy się również wówczas gdy:

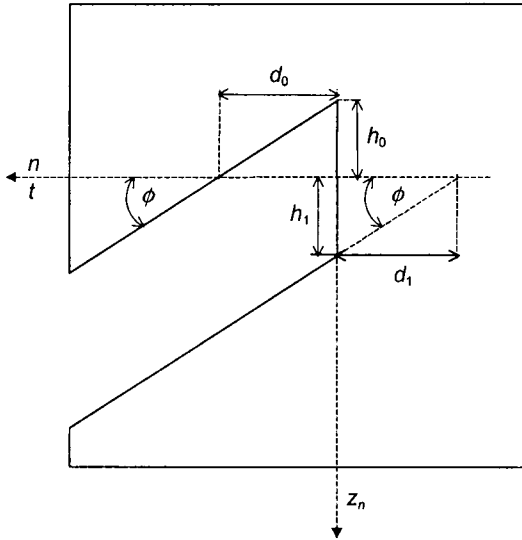
$$D_r \leq 0. \quad (35)$$

W takiej sytuacji również następuje zerowanie licznika indeksu operacyjnego ( $j = 0$ ), jednak bez podejmowania działań korygujących przebieg procesu.

Przedstawione powyżej algorytmy, zarówno graficzny, jak i numeryczny, można zmodyfikować w taki sposób, by omawiana procedura umożliwiała akceptację monitorowanego procesu. W tym celu należy zrezygnować z zastosowanego powyżejłączenia obszaru akceptacji procesu z obszarem kontynuowa-

<sup>11</sup> Wygodnym, a niezbyt często stosowanym sposobem losowego wyboru punktów na osi czasu jest zastosowanie liczb złotych (Iwasiewicz i Paszek, 2004).





Ryc. 4. Maskownica stosowana w procedurze z możliwością akceptacji procesu

nia obserwacji. W konsekwencji, maskownica stosowana w graficznej wersji procedury ma kształt pokazany schematycznie na rycinie 4. Szczegółowy kształt tej maskownicy określony jest przez trzy — zaznaczone na rysunku — parametry, a mianowicie:  $d_0$ ,  $d_1$  oraz  $c = \operatorname{tg} \phi$ . Dla potrzeb algorytmu numerycznego wyznacza się dodatkowo  $h_0$  oraz  $h_1$ . Jeśli wartości  $p_0$  i  $p_1$  są ustalone, to parametr  $c$  ma tu taką samą wartość jak w standardowej procedurze, bez możliwości akceptacji procesu, albowiem nie zależy ona od przyjętych wartości  $\alpha$  i  $\beta$ . Parametry  $d_0$  i  $h_0$  dotyczą tego segmentu procedury, który umożliwia przyjęcie hipotezy zerowej  $H_0$ , a więc akceptację śledzonego procesu w tym sensie, że  $p \leq p_0$ . Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym, że w rzeczywisty poziom procesu  $p$  spełnia nierówność  $p > p_1$ , nie przekracza przyjętej wstępnie, dowolnie małej, dodatniej wartości  $\beta$ . Parametry  $d_1$  i  $h_1$  dotyczą natomiast tego segmentu procedury, który umożliwia przyjęcie hipotezy alternatywnej  $H_1$ , a więc dyskwalifikację monitorowanego procesu. Przyjmując  $H_1$  orzekamy, że  $p > p_1$ , a prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym, że w rzeczywistości proces jest uregulowany ( $p \leq p_0$ ), nie przekracza przyjętej wstępnie, dowolnie małej, dodatniej wartości  $\alpha$ . Parametr  $d_0$  uzyskujemy w rezultacie przedstawionych poniżej przekształceń równania dolnej linii kontrolnej w klasycznej procedurze sekwencyjnej (zob. ryc. 2). Równanie to przedstawia się następująco:

$$z_d(n) = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} + \frac{\ln \frac{q_0}{q_1}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} \times n. \quad (36)$$

Chcąc uzyskać równanie parametru  $d_0$  należy wyznaczyć pierwiastek (miejsce zerowe) powyższego równania ( $n_0$ ). Po niezbędnych przekształceniach mamy:

$$\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \ln \frac{q_0}{q_1} \times n = 0, \quad (37)$$

$$n_0 = \frac{-\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{q_0}{q_1}} > 0. \quad (38)$$

W konsekwencji:

$$d_0 = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{q_0}{q_1}} < 0. \quad (39)$$

Równanie parametru  $h_0$  — wykorzystywanego w numerycznej wersji procedury — przedstawia się następująco:

$$h_0 = c \times d_0 = \frac{\ln \frac{q_0}{q_1}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} \times \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{q_0}{q_1}} = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} < 0. \quad (40)$$

W analogiczny sposób uzyskuje się równania parametrów  $d_1$  i  $h_1$ . Mamy mianowicie:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{q_0}{q_1}} > 0, \quad (41)$$

$$h_1 = c \times d_1 = \frac{\ln \frac{q_0}{q_1}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} \times \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{q_0}{q_1}} = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} > 0. \quad (42)$$

Dysponując wartościami parametrów  $c$ ,  $h_0$  i  $h_1$  można skonstruować numeryczny algorytm weryfikacji hipotez (13) i (14), w odniesieniu do monitorowanego procesu. Analogicznie jak poprzednio, każdą uzyskaną empirycznie wartość  $x_t$  (0 albo 1) porównuje się z wartością parametru  $c = \text{tg} \varphi$ . Wynik tego porównania wyznacza drogę dalszego postępowania.

Analiza sekwencji, która może doprowadzić do przyjęcia hipotezy zerowej (13), a więc do stwierdzenia, że monitorowany proces jest uregulowany, przebiega według przedstawionego poniżej schematu.

1. Śledzenie tej sekwencji rozpoczyna się wówczas gdy pojawi się wartość  $x_t < c$ , a więc wartość  $x_t = 0$ . Uruchamia się wówczas licznik indeksu operacyjnego ( $i = 1$ ).

2. W dalszym postępowaniu oblicza się wartość sumy skumulowanej:

$$D_{0,s} = \sum_{i=1}^s (x_{ti} - c), \quad (43)$$

gdzie:  $t$  — indeks bieżący,  $i$  — indeks operacyjny,  $s$  — największa w danym momencie wartość indeksu operacyjnego ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ).

3. Przyjęcie hipotezy zerowej (13) oraz zakończenie śledzenia danej sekwencji punktów empirycznych i zerowanie licznika indeksu operacyjnego ( $i = 0$ ) następuje wówczas, gdy:

$$D_{0,s} \leq h_0, \quad (44)$$

przy czym  $h_0 < 0$ , zob. wzór (40). Przyjmując hipotezę zerową (13) i akceptując — w konsekwencji — przebieg śledzonego procesu, z prawdopodobieństwem  $\beta$  narażamy się na ryzyko, że w rzeczywistości prawdziwa jest hipoteza alternatywna (14).

4. Analizę obserwowanej sekwencji kończy się również wtedy, kiedy zostanie spełniona nierówność:

$$D_{0,s} \geq 0. \quad (45)$$

W takiej sytuacji również zeruje się licznik indeksu operacyjnego ( $i = 0$ ).

Analiza sekwencji, która może doprowadzić do przyjęcia hipotezy alternatywnej (14), a więc do stwierdzenia, że monitorowany proces jest rozregulowany, przebiega według przedstawionego poniżej schematu.

1. Śledzenie tej sekwencji rozpoczyna się wówczas gdy pojawi się wartość  $x_t > c$ , a więc wartość  $x_t = 1$ . Uruchamia się wówczas licznik indeksu operacyjnego ( $j = 1$ ).

2. W dalszym postępowaniu oblicza się wartości sumy skumulowanej według wzoru (33). Sumę tę oznaczmy obecnie symbolem  $D_{1,r}$ , dla odróżnienia od analogicznej sumy w algorytmie bez możliwości akceptacji monitorowanego procesu.

3. Przyjęcie hipotezy alternatywnej (14) i zakończenie śledzenia danej sekwencji punktów empirycznych następuje wówczas, gdy spełniona jest nierówność:

$$D_{1,r} \geq h_1. \quad (46)$$

W konsekwencji emitowany jest sygnał o rozregulowaniu monitorowanego procesu, a prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym,

że jest to sygnał fałszywy nie przekracza przyjętej wartości  $\alpha$ . W konsekwencji powinny być podjęte działania zmierzające do przywrócenia procesowi poprawnego przebiegu. Emisja sygnału o rozregulowaniu procesu kończy obserwowaną sekwencję. Następuje zerowanie licznika indeksu operacyjnego ( $j = 0$ ).

4. Śledzenie rozpoczętej sekwencji kończy się również wówczas, gdy:

$$D_{1,r} \leq 0. \quad (47)$$

W takiej sytuacji również następuje zerowanie licznika indeksu operacyjnego ( $j = 0$ ), jednak bez podejmowania działań korygujących przebieg procesu.

Należy podkreślić, że wyróżnione powyżej dwie konkurencyjne sekwencje punktów empirycznych nie są rozłączne. Nie są one rozłączne w tym sensie, że obydwie mogą przebiegać jednocześnie. I tak np. sekwencja mogąca doprowadzić do przyjęcia hipotezy zerowej  $H_0$  — w konsekwencji — do akceptacji monitorowanego procesu, rozpoczyna się od wartości  $x_t = 0$ , ale nie jest przecież wykluczone, że w czasie jej trwania pojawi się punkt empiryczny o wartości  $x_t = 1$ . Punkt taki rozpoczyna nową sekwencję, mogącą doprowadzić do przyjęcia hipotezy alternatywnej  $H_1$  i dyskwalifikacji procesu, ale jednocześnie nie przerywa on wcześniej rozpoczętej, konkurencyjnej sekwencji dopóty, dopóki nie zostanie spełniona nierówność (45). To samo dotyczy oczywiście sekwencji rozpoczynającej się od obserwacji empirycznej o wartości  $x_t = 1$ .

## BIBLIOGRAFIA

- Achelis S.B. 1998. *Analiza techniczna od a do z*, tłum. z j. ang., Oficyna Wydawnicza LT & P, Warszawa.
- Iwasiewicz A. 1985. *Statystyczna kontrola jakości w toku produkcji; systemy i procedury*, PWN, Warszawa.
- Iwasiewicz A. 1999. *Zarządzanie jakością*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków.
- Iwasiewicz A. 2001. *Karty kontrolne Shewharta z możliwością akceptacji procesu*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, 320, 35–48.
- Iwasiewicz A. 2005. *Zarządzanie jakością w przykładach i zadaniach*, Śląskie Wydawnictwa Naukowe Wyższej Szkoły Zarządzania i Nauk Społecznych w Tychach, Tychy.
- Iwasiewicz A. 2005–2006. *Monitorowanie procesów binarnych*, Folia Oeconomica Cracoviensia, 46–47, 103–116.
- Iwasiewicz A., Paszek A. 2004. *Statystyka z elementami statystycznych metod monitorowania procesów*, wyd. IV poprawione, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Iwasiewicz A., Stefanów P. 2000. *Wykorzystanie testów wzorca przebiegu w statystycznym sterowaniu procesami*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, 874, 199–207.
- Juran J.M. 1962. *Handbook of quality*, McGraw Hill, New York.
- Major M. 1997. *Sterowanie procesem za pomocą kartkontrolnych sum skumulowanych*, Materiały konferencyjne z I Krajowej Konferencji Naukowej Materiałoznawstwo — Odlewnictwo, t. 3, Jakość, Kraków.
- Montgomery D.C. 2005. *Introduction to statistical quality control, fifth edition*, John Wiley & sons, inc.
- PN-ISO 8258+AC1 1996. *Karty kontrolne Shewharta*.
- Rinne H., Mittag H.J. 1988. *Statistische Methoden der Qualitaetssicherung*, Fernuniversitaet — Gesamthochschule — in Hagen.

## UWARUNKOWANIA POMIARU WSPÓŁZALEŻNOŚCI CECH

TADEUSZ GRABIŃSKI

Katedra Finansów  
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie  
PL 31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27  
email: tg@ne.krakow.pl

Praca przedstawiona na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych PAN w dniu 20 stycznia 2009 r. przez autora.

## ABSTRACT

Tadeusz Grabiński, *Problems of measuring statistical dependence of variables*, Folia Oeconomica Cracoviensia, 2008–2009, 49–50: 91–107.

The paper presents propositions of modification in correlation and regression linear analysis. It is a result of problems in interpretation of statistical dependance measures in case where data are referring to aggregate units (e.g. countries). The paper shows results of research made at the beginning of 2000 for 81 countries by R. Lynn and T. Vanhanen who show that IQ is one of important factors contributing to differences in wealth of nations and rates of economic growth.

## KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

measures of dependence, analysis of correlation and regression, wealth of nation, IQ  
miary współzależności, analiza korelacji i regresji, bogactwo narodów, iloraz inteligencji

## 1. WPROWADZENIE

Podstawą badań statystycznych są informacje opisujące analizowane elementy zbiorowości (próby) z punktu widzenia wybranej cechy (jednej lub więcej). W każdej analizie należy zdefiniować jednostki badania oraz określić cechy charakteryzujące te jednostki.

Wyróżnia się jednostki elementarne oraz agregatowe. Trudno podać precyzyjne rozróżnienie tych pojęć, gdyż zależy ono od kontekstu

analizy. Przykładem jednostek elementarnych jest osoba, firma, produkt, gmina i w tym kontekście odpowiednimi jednostkami agregatowymi są: gospodarstwa domowe dla osób; branża dla firm; region, województwa, powiaty dla gmin itp.

To rozróżnienie nie zawsze jest brane pod uwagę w analizach ekonometrycznych i może prowadzić do kłopotów w interpretacji uzyskanych wyników. W wielu przypadkach mamy do czynienia z jednostkami agregatowymi, które traktujemy z jednakową wagą, podczas gdy nie zawsze jest to uzasadnione wielkością tych jednostek.

Dodatkowym elementem, na który należy zwrócić szczególną uwagę w badaniach są miana (jednostki pomiarowe) analizowanych cech. Mogą to być miana naturalne (zł, kg, osoby) lub złożone o charakterze wskaźników (dochód narodowy na osobę, zarobek tygodniowy na 1 zatrudnionego).

Przedmiotem niniejszego artykułu jest przedstawienie problemów związanych z istotą jednostek analizy i ich mian w przypadku pomiaru współzależności cech. Rozważania ograniczone zostaną do najprostszych metod oceny współzależności — liniowych współczynników korelacji i regresji jednej zmiennej, ale można je rozszerzyć na bardziej zaawansowane miary.

Dla ułatwienia przyjmuje się najprostszy przypadek analizy, w którym mamy do czynienia z danymi statycznymi. Punktem wyjścia rozważań są więc informacje liczbowe (skala ilorazowa) dotyczące  $n$ -elementowego zbioru jednostek, opisujące je z punktu widzenia dwóch cech  $X$  i  $Y$  w wybranym momencie czasowym:

$$\begin{aligned} \{X\} &= [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ \{Y\} &= [y_1, y_2, \dots, y_n]. \end{aligned}$$

## 2. WSPÓŁZALEŻNOŚĆ POMIĘDZY BOGACTWEM A INTELIGENCJĄ W SKALI MAKROEKONOMICZNEJ

Dla zilustrowania trudności z jakimi można się spotkać przy analizie współzależności przytoczono wyniki badań R. Lynna oraz T. Vanhanena (2002) nad bogactwem narodów. Przyczyny bogactwa i ubóstwa są przedmiotem zainteresowania wielu badaczy (Landes, 1998), począwszy od pracy Adama Smitha z 1776 roku *Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów*, poprzez teorie wskazujące na takie determinanty bogactwa narodów jak: klimat (Monteskiusz, 1748; Landes, 2000), kultura i religia (Weber, 1994), położenie geograficzne (Diamond, 1998), system gospodarczy (Olson, 1996), rozwój technologii (Solow, 19956), kapitał ludzki i inteligencja (Herrnstein i Murray, 1996; Lynn i Vanhanen, 2002).

Zależność pomiędzy bogactwem a inteligencją można badać w skali mikroekonomicznej, gdzie jednostkami analizy są osoby. W pracy R. J. Herrnste-

ina i Ch. Murraya (1994) wskazywano, że inteligencja jest dobrym predyktorem sukcesu zawodowego, a niski poziom IQ jest jedną z głównych przyczyn plag społecznych — bezrobocia, przestępczości, narkomanii, samotnego macierzyństwa. Drugim możliwym ujęciem jest analiza makroekonomiczna, w której jednostkami analizy są regiony lub kraje. W pracy R. Lynna i T. Vanhanena (2002) postawiono tezę, że zamożność w skali makroekonomicznej zależy od inteligencji narodu i jest z nią wysoko oraz dodatnio skorelowana.

Zamożność krajów opisano wielkością produktu narodowego brutto (GDP) na osobę w dolarach na podstawie danych dla roku 1998. Analizę oparto na informacjach odnoszących się do 81 krajów, dla których udało się zebrać w miarę porównywalne dane (główne chodziło o trudności w zebraniu odpowiednio dużej liczby informacji opisujących stopień inteligencji). Cecha GDP jest często wykorzystywana w wielu analizach i pomimo pewnych zastrzeżeń co do adekwatności miernika GDP jako dobrego wskaźnika bogactwa na ogół jest akceptowana w wielu opracowaniach.

Gorzej przedstawia się sprawa pomiaru inteligencji w skali makroekonomicznej (dla mieszkańców danego kraju). R. Lynn i T. Vanhanen założyli, że inteligencja nie jest równoznaczna z wykształceniem, wiedzą, wynalazczością czy też mądrością i w swoich badaniach mierzyli ją średnim wynikiem testu inteligencji (iloraz inteligencji — IQ) z wielu indywidualnych pomiarów wy-

Tabela 1

Współczynniki inteligencji (IQ), produkt narodowy brutto GDP (w \$ na osobę) oraz liczba ludności (w tys.) w wybranych krajach (dane za różne lata w okresie 1996–2002)

Kraj	IQ	GDP/os. (\$)	Ludność (tys)	Kraj	IQ	GDP/os. (\$)	Ludność (tys)
Argentyna	96	12 013	38 337	Lebanon	86	4 326	3 731
Australia	98	22 452	19 767	Malaysia	92	8 137	23 105
Austria	102	23 166	8 163	Marshall Islands	84	3 000	56
Barbados	78	12 001	277	Mexico	87	7 704	103 718
Belgium	100	23 223	10 331	Morocco	85	3 305	31 754
Brazil	87	6 625	183 960	Nepal	78	1 157	26 470
Bulgaria	93	4 809	7 588	Netherlands	102	22 176	16 223
Canada	97	23 582	31 889	New Zealand	100	17 288	3 960
China	100	3 105	1 291 496	Nigeria	67	795	131 728
Colombia	89	6 006	41 802	Norway	98	26 342	4 555
Congo (Brazz)	73	995	3 413	Peru	90	4 282	27 275
Congo (Zaire)	65	822	56 886	Philippines	86	3 555	86 752

Kraj	IQ	GDP/os. (\$)	Ludność (tys)	Kraj	IQ	GDP/os. (\$)	Ludność (tys)
Croatia	90	6 749	4 498	Poland	99	7 619	38 603
Cuba	85	3 967	11 247	Portugal	95	14 701	10 480
Czech Republic	97	12 362	10 251	Puerto Rico	84	8 000	3 878
Denmark	98	24 218	5 394	Qatar	78	20 987	725
Ecuador	80	3 003	13 074	Romania	94	5 648	22 380
Egypt	83	3 041	74 761	Russia	96	6 460	144 308
Equatorial Guinea	59	1 817	536	Samoa (Western)	87	3 832	204
Ethiopia	63	574	70 366	Sierra Leone	64	458	5 571
Fiji	84	4 231	869	Singapore	103	24 210	4 277
Finland	97	20 847	5 204	Slovakia	96	9 699	5 416
France	98	21 175	62 171	Slovenia	95	14 293	2 012
Germany	102	22 169	82 398	South Africa	72	8 488	46 567
Ghana	71	1 735	21 111	Spain	97	16 212	40 217
Greece	92	13 943	10 626	Sudan	72	1 394	36 593
Guatemala	79	3 505	11 725	Suriname	89	5 161	450
Guinea	66	1 782	8 756	Sweden	101	20 659	8 970
Hong Kong	107	20 763	6 810	Switzerland	101	25 512	7 408
Hungary	99	10 232	10 058	Taiwan	104	13 000	22 543
India	81	2 077	1 057 504	Tanzania	72	480	36 199
Indonesia	89	2 651	223 070	Thailand	91	5 456	63 271
Iran	84	5 121	63 988	Tonga	87	3 000	108
Iraq	87	3 197	24 683	Turkey	90	6 422	68 109
Ireland	93	21 482	3 924	U. Kingdom	100	20 336	60 095
Israel	94	17 301	6 492	Uganda	73	1 074	26 322
Italy	102	20 585	57 998	United States	98	29 605	290 343
Jamaica	72	3 389	2 689	Uruguay	96	8 623	3 387
Japan	105	23 257	127 358	Zambia	77	719	10 800
Kenya	72	980	33 042	Zimbabwe	66	2 669	11 816
Korea, South	106	13 478	47 657				

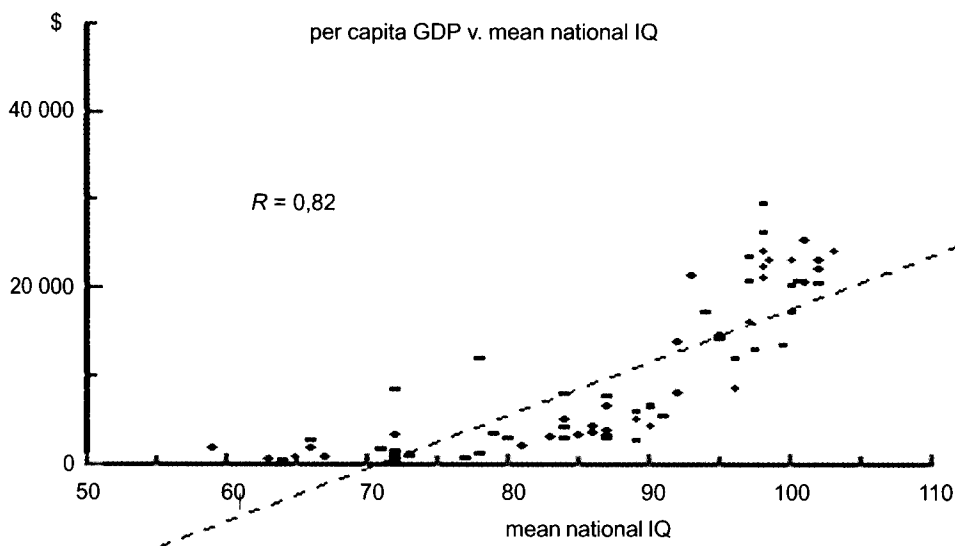
Źródło: kol. 2-3 — Lynn i Vanhanen, 2002, kol. 4 — <http://www.census.gov/ipc/www/idb/tables.html>.



konanych na mieszkańcach poszczególnych krajów. W sposób bezpośredni udało się im zebrać informacje z 81 krajów (zapewne o różnym stopniu reprezentatywności). W niektórych krajach (Polska, Holandia, Belgia) dane te były gromadzone w ramach widowisk telewizyjnych w stylu: *Narodowy test inteligencji Polaków* (TVN, 2003, 300 tys. osób). R. Lynn i T. Vanhanen oszacowali także średnie ilorazy inteligencji dla pozostałych 104 krajów (dla których dysponowali informacjami o dochodzie narodowym) na podstawie średnich ilorazów inteligencji w sąsiednich krajach, jednakże dane te nie zostały szerzej wykorzystane.

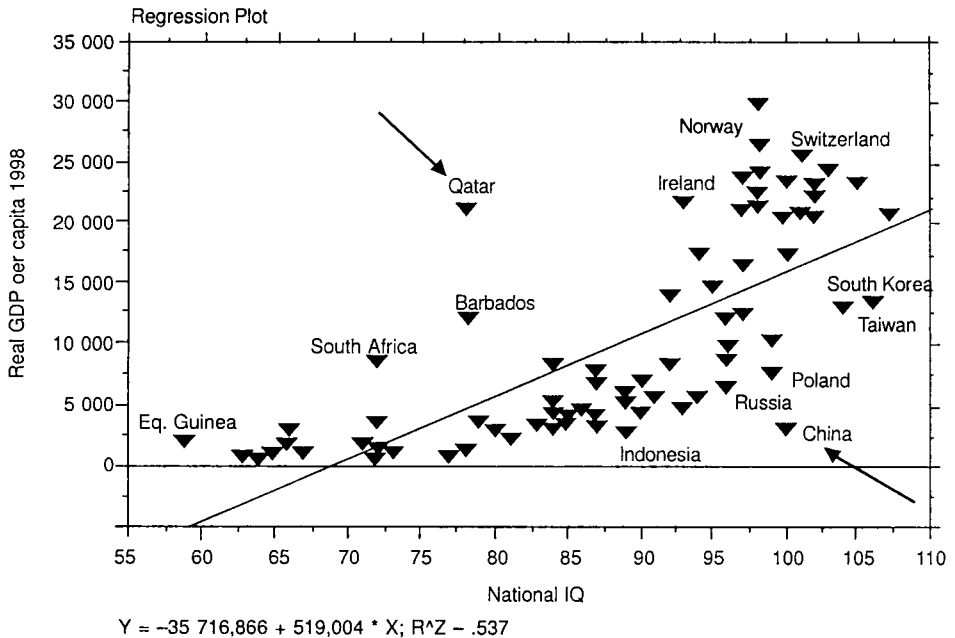
W tabeli 1 przytoczono wartości zmiennych stanowiących podstawę badań R. Lynna i T. Vanhanena. W ostatniej kolumnie przytoczono dodatkowo liczbę mieszkańców dla poszczególnych krajów, gdyż zadaniem niniejszego artykułu jest pokazanie jak się mogą zmienić wyniki analiz w przypadku uwzględnienia dodatkowych informacji (w tym przypadku liczby ludności) o badanych obiektach.

Na rycinach 1–2 przedstawiono rezultaty analizy R. Lynna i T. Vanhanena. Są to diagramy rozrzutu pokazujące zależność wyrażającą się w tym, że kraje zamożne zamieszkałe są na ogół przez mieszkańców z większymi ilorazami inteligencji. I odwrotnie, społeczeństwa krajów niezamożnych zazwyczaj charakteryzują się mniejszymi ilorazami inteligencji. Rycina 1 zawiera oryginalny diagram z pracy R. Lynna i T. Vanhanena natomiast rycina 2 — wykres zmodyfikowany przytoczony w <http://www.amren.com/ar/2002/12/>.



Źródło: <http://www.lagriffedulion.f2s.com/sft.htm>.

Ryc. 1. Oryginalny diagram rozrzutu pomiędzy GDP oraz IQ wraz z liniową funkcją regresji



Źródło: <http://www.amren.com/ar/2002/12/> *The Global Bell Curve. Uncommon sense on wealth and poverty.*, reviewed by Thomas Jackson

Ryc. 2. Poprawiony diagram rozrzutu pomiędzy GDP oraz IQ dla 81 krajów wraz z liniową funkcją regresji

Różnica pomiędzy tymi rycinami wyraża się w tym, że rycina 2 odpowiada dokładnie danym zamieszczonym w tabeli 1, natomiast w rycinie 1 nie uwzględniono kilku krajów, m.in. Chin i Kataru, dla których wartości badanych zmiennych wyraźnie odbiegały od linowej linii regresji. Dlatego też współczynniki korelacji pomiędzy GDP a IQ przytoczone w obydwóch rysunkach różnią się od siebie. Na rycinie 1 (bez Chin i Kataru) współczynnik korelacji przyjmuje wartość 0,82, natomiast na rycinie 2 (z Chinami i Kataru) — tylko 0,73. Trudno się oprzeć wrażeniu, że ta operacja mogła być spowodowana chęcią wykazania większej siły zależności. Taki proceder prowokuje do pytania: czy przypadkiem nie dokonywano innych manipulacji danych dla potwierdzenia tezy o wysokim poziomie współzależności pomiędzy inteligencją a bogactwem?

Zależność widoczną na rycinie 2 opisano za pomocą liniowej funkcji regresji o postaci:

$$\text{GDP} = -35\,717 + 519 \cdot \text{IQ} \quad (R^2 = 0,537).$$

Parametry tej funkcji można zinterpretować następująco. Parametr znajdujący się przy zmiennej IQ (519 \$ GDP/os/rok) wskazuje na „wartość” jednego punktu ilorazu inteligencji (wartość kapitału intelektualnego). Przy wzroście

średniego ilorazu inteligencji mieszkańców danego kraju o 1 punkt IQ można się spodziewać wzrostu zamożności o 519 \$ na 1 osobę w ciągu 1 roku. Jako że inteligencję „produkuję” system oświatowy kraju (szkolnictwo) można stąd oszacować wartość produktu tworzonego przez ten system, np. w Polsce podniesienie średniego ilorazu inteligencji o 1 punkt IQ może skutkować wzrostem GDP o:

$$[519 \$ * 38 \text{ mln mieszkańców}] \approx 20 \text{ mld \$ / rok} \approx 60 \text{ mld zł / rok.}$$

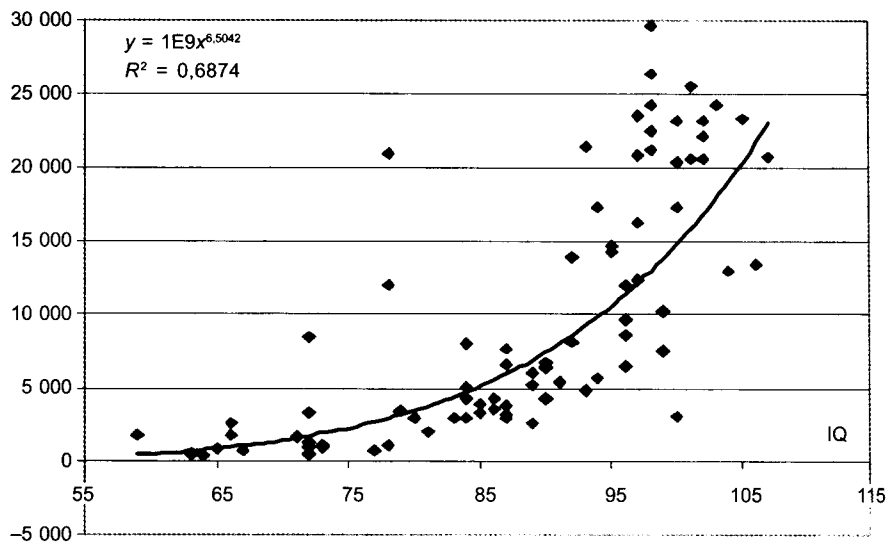
Oczywiście jest to rachunek obarczony znacznym błędem, którego wielkość można oszacować na poziomie  $1 - 0,537 = 0,473$ , czyli na ok. 47%. Jest zrozumiałe, że wzrost produktu narodowego zależy od wielu innych czynników, a poziom inteligencji (o ile w ogóle) jest tylko jednym z nich. Tym niemniej, nawet uwzględniając ten wysoki brak precyzji, sektory oświaty, szkolnictwa wyższego i nauki mają pewne podstawy do twierdzenia, że wartość ich działalności (po udowodnieniu, że iloraz inteligencji społeczeństwa w ciągu roku rzeczywiście wzrósł o 1 pkt IQ) kształtuje się co najmniej na poziomie ok. 30 mld zł w skali roku (tzn. 50% z 60 mld zł).

Interpretacja wyrazu wolnego jest bardziej abstrakcyjna. Formalnie jest to wielkość GDP w przypadku „zerowej” inteligencji mieszkańców danego kraju. W tym przypadku oznacza to, że do każdego „mieszkańca” należałoby doliczyć ponad 35 tys. \$ GDP na rok (ujemna wartość wyrazu wolnego funkcji regresji) aby społeczeństwo takie mogło w ogóle funkcjonować.

Bliższa analiza rycin 1 i 2 wskazuje, że liniowa funkcja regresji nie oddaje zbyt poprawnie empirycznego rozrzutu punktów. W szczególności dla krajów o niskich ilorazach inteligencji teoretyczne wielkości GDP są ujemne, podczas gdy faktyczne wielkości w tych krajach są dodatnie. Dlatego też na podstawie tych samych danych oszacowano dwie inne funkcje regresji: potęgową oraz wykładniczą. Wyniki w postaci diagramów rozrzutu z dopasowanymi funkcjami regresji przedstawiono na rycinach 3 i 4.

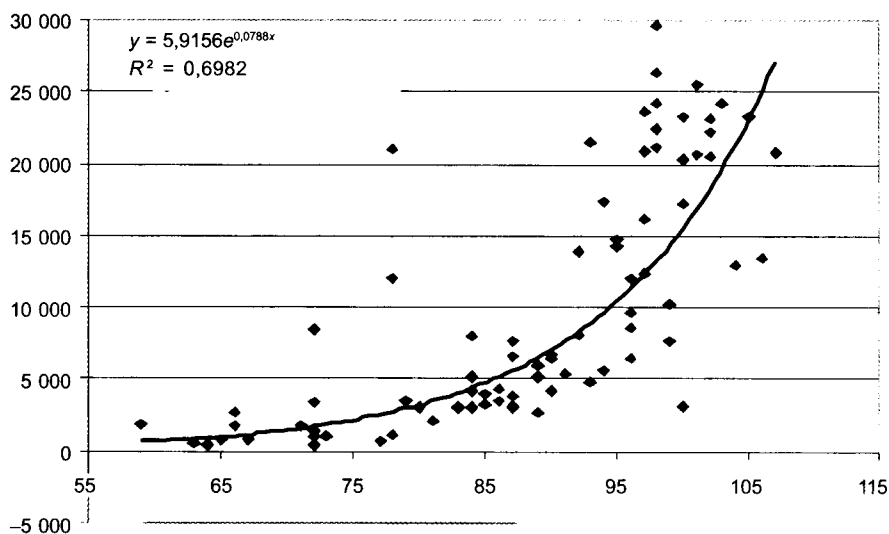
Jak można zauważyć obydwie funkcje są lepiej dopasowane do danych empirycznych, jakkolwiek funkcja wykładnicza jest nieco „lepszą” ( $R^2 = 0,698$ ) od funkcji potęgowej ( $R^2 = 0,687$ ). W przypadku funkcji liniowej współczynnik determinacji był mniejszy i wynosił tylko  $R^2 = 0,537$ . Parametry oszacowanych funkcji regresji zebrano w tabeli 2. Obok parametrów strukturalnych podano tu odpowiadające im statystyki Studenta, miary dopasowania (współczynniki korelacji i determinacji, średni błąd dopasowania i współczynnik zmienności resztowej), jak również teoretyczne wielkości GDP dla Polski wynikające z oszacowanych funkcji regresji oraz względne wielkości różnicy pomiędzy teoretycznymi a faktyczną (7619 \$/os/rok) wielkością GDP dla Polski.

Ten ostatni parametr można zinterpretować jako tę wielkość produktu narodowego brutto, która powinna uzyskać Polska w relacji do średniego ilorazu inteligencji IQ mieszkańców naszego kraju (oczywiście w sytuacji, gdyby



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 3. Potęgowa funkcja regresji pomiędzy GDP a IQ (81 krajów)



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 4. Wykładnicza funkcja regresji pomiędzy GDP a IQ (81 krajów)

inteligencja była jedynym czynnikiem determinującym poziom GDP). Jak się okazuje, faktyczna wielkość GDP (7619 \$/os/rok) jest o połowę mniejsza niż wielkości teoretyczne wynikające z oszacowanych funkcji regresji. Można to traktować jako szacunek wielkości niewykorzystanego ekonomicznie potencjału tkwiącego w kapitale ludzkim społeczeństwa Polski.

Tabela 2

Parametry liniowej, potęgowej i wykładniczej funkcji regresji pomiędzy GDP a IQ

Parametr	Funkcja liniowa	Funkcja potęgowa	Funkcja wykładnicza
Wyraz wolny [a]	-35 717	1,4545E-09	5,9156
Statystyka Studenta [t(a)]	-7,40	-9,22	3,42
Współczynnik kierunkowy [b]	519,0	6,504	0,0788
Statystyka Studenta [t(b)]	9,57	13,18	13,52
Współczynnik determinacji [ $R^2$ ]	0,537	0,687	0,698
Współczynnik korelacji [R]	0,732	0,829	0,836
Średni błąd dopasowania [s]	5 813 \$	5 672 \$	5 665 \$
Współczynnik zmienności resztowej [V]	57,8%	56,4%	56,3%
Wartość teoretyczna GDP dla Polski	15 664 \$	13 893 \$	14 391 \$
Względna różnica między teoretycznym a faktycznym GDP dla Polski	-51,4%	-45,2%	-47,1%

Źródło: obliczenia własne.

Oczywiście interpretacja tych parametrów jest dyskusyjna i trudno ją rekomendować. Pokazuje tylko formalne możliwości wykorzystania klasycznych modeli regresji.

### 3. MODYFIKACJE ANALIZOWANYCH ZMIENNYCH

W przedstawionej powyżej analizie wykorzystano standardowe podejście, w którym rozpatruje się zależności korelacyjno-regresyjne. Na pierwszy rzut oka jednak widać, że dyskusyjne jest identyczne traktowanie w ocenie współzależności takich krajów jak Chiny (1,3 mld mieszkańców, czyli 1/4 mieszkańców całej badanej zbiorowości) oraz np. Wysp Marshalla (50 tys. mieszkańców) czy też Wysp Tonga (100 tys. mieszkańców), które to państwa mogłyby być traktowane jako niewielkie miasta. Tymczasem na diagramach rozrzutu czy też w obliczeniach wszystkie obiekty (kraje) mają takie samo znaczenie (wagę).

W tabeli 3 podano skumulowane wartości (w procentach) trzech zmiennych — liczby ludności [LUD] oraz iloczynów liczby ludności przez średnie ilorazy inteligencji [IQ\*LUD] a także przez wskaźniki produktu narodowego brutto [GDP\*LUD]. Kraje uporządkowane są według rosnącej liczby ludności,

Skumulowana liczba ludności (LUD), kapitału intelektualnego (IQ\*LUD)  
oraz kapitału ekonomicznego (GDP\*LUD)

Lp.	Kraj	LUD (tys.)	IQ*LUD/ 100	GDP*LUD/ 1000	% CUM LUD	% CUM (IQ*LUD)	% CUM (GDP*LUD)
1	Marshall Islands	56	47	169	0,00	0,00	0,00
2	Tonga	108	94	325	0,00	0,00	0,00
3	Samoa (Western)	204	177	781	0,01	0,01	0,00
4	Barbados	277	216	3 321	0,01	0,01	0,03
5	Suriname	450	400	2 322	0,02	0,03	0,01
6	Equatorial Guinea	536	316	974	0,03	0,02	0,01
7	Qatar	725	566	15 218	0,05	0,04	0,14
8	Fiji	869	730	3 676	0,06	0,05	0,05
9	Slovenia	2 012	1 911	28 752	0,10	0,10	0,42
10	Jamaica	2 689	1 936	9 114	0,15	0,14	0,09
11	Uruguay	3 387	3 252	29 209	0,22	0,33	0,50
12	Congo (Brazz)	3 413	2 491	3 396	0,28	0,19	0,04
13	Lebanon	3 731	3 209	16 140	0,36	0,26	0,22
14	Puerto Rico	3 878	3 257	31 023	0,43	0,40	0,75
15	Ireland	3 924	3 649	84 296	0,51	0,55	2,62
16	New Zealand	3 960	3 960	68 465	0,58	0,64	2,17
17	Singapore	4 277	4 405	103 541	0,67	0,82	3,18
18	Croatia	4 498	4 048	30 356	0,75	0,72	0,59
19	Norway	4 555	4 464	119 998	0,84	0,91	5,00
20	Finland	5 204	5 048	108 496	0,94	1,02	4,05
21	Denmark	5 394	5 286	130 635	1,04	1,25	6,04
22	Slovakia	5 416	5 200	52 534	1,15	1,13	1,99
23	Sierra Leone	5 571	3 565	2 551	1,26	0,47	0,02
24	Israel	6 492	6 102	112 317	1,38	1,50	4,35
25	Hong Kong	6 810	7 286	141 391	1,51	1,81	6,43
26	Switzerland	7 408	7 482	189 001	1,66	1,97	8,78
27	Bulgaria	7 588	7 057	36 493	1,80	1,65	1,03
28	Austria	8 163	8 326	189 096	1,96	2,49	9,30
29	Guinea	8 756	5 779	15 602	2,13	1,37	0,18
30	Sweden	8 970	9 060	185 318	2,30	2,68	7,76

Lp.	Kraj	LUD (tys.)	IQ*LUD/ 100	GDP*LUD/ 1000	% CUM LUD	% CUM (IQ*LUD)	% CUM (GDP*LUD)
31	Hungary	10 058	9 957	102 911	2,50	3,93	2,90
32	Czech Republic	10 251	9 944	126 724	2,69	3,51	5,69
33	Belgium	10 331	10 331	239 913	2,89	4,16	10,57
34	Portugal	10 480	9 956	154 066	3,10	3,72	7,25
35	Greece	10 626	9 776	148 158	3,30	3,30	6,83
36	Zambia	10 800	8 316	7 765	3,51	2,31	0,07
37	Cuba	11 247	9 560	44 616	3,73	3,09	1,58
38	Guatemala	11 725	9 263	41 097	3,95	2,88	1,46
39	Zimbabwe	11 816	7 798	31 536	4,18	2,13	0,84
40	Ecuador	13 074	10 459	39 261	4,43	4,38	1,23
41	Netherlands	16 223	16 548	359 767	4,75	5,05	16,51
42	Australia	19 767	19 371	443 798	5,13	5,88	19,99
43	Ghana	21 111	14 989	36 628	5,53	4,70	1,13
44	Romania	22 380	21 037	126 404	5,97	6,77	5,34
45	Taiwan	22 543	23 445	293 065	6,40	8,19	12,06
46	Malaysia	23 105	21 257	188 006	6,85	7,23	8,27
47	Iraq	24 683	21 474	78 913	7,32	7,69	2,39
48	Uganda	26 322	19 215	28 270	7,83	5,47	0,35
49	Nepal	26 470	20 646	30 625	8,34	6,32	0,67
50	Peru	27 275	24 548	116 792	8,87	9,22	4,67
51	Morocco	31 754	26 991	104 948	9,48	10,92	3,75
52	Canada	31 889	30 933	752 014	10,10	11,58	28,43
53	Kenya	33 042	23 790	32 381	10,73	8,70	0,93
54	Tanzania	36 199	26 063	17 375	11,43	9,78	0,27
55	Sudan	36 593	26 347	51 010	12,14	10,34	1,84
56	Argentina	38 337	36 803	460 541	12,88	13,09	21,24
57	Poland	38 603	38 217	294 115	13,62	15,49	12,86
58	Spain	40 217	39 011	652 005	14,40	16,33	26,38
59	Colombia	41 802	37 204	251 062	15,21	14,68	11,26
60	South Africa	46 567	33 528	395 258	16,10	12,30	17,59
61	Korea, South	47 657	50 516	642 316	17,02	18,36	24,60
62	Congo (Zaire)	56 886	36 976	46 760	18,12	13,88	1,71

Lp.	Kraj	LUD (tys.)	IQ*LUD/ 100	GDP*LUD/ 1000	% CUM LUD	% CUM (IQ*LUD)	% CUM (GDP*LUD)
63	Italy	57 998	59 158	1 193 896	19,24	22,01	36,40
64	U. Kingdom	60 095	60 095	1 222 085	20,40	23,29	43,04
65	France	62 171	60 928	1 316 479	21,60	24,60	46,63
66	Thailand	63 271	57 577	345 207	22,82	20,74	15,53
67	Iran	63 988	53 750	327 684	24,06	19,51	14,59
68	Turkey	68 109	61 299	437 399	25,37	25,91	18,78
69	Ethiopia	70 366	44 331	40 390	26,73	17,28	1,34
70	Egypt	74 761	62 051	227 347	28,17	27,23	9,92
71	Germany	82 398	84 046	1 826 688	29,76	30,63	51,61
72	Philippines	86 752	74 606	308 402	31,43	28,83	13,70
73	Mexico	103 718	90 235	799 044	33,43	34,45	30,60
74	Japan	127 358	133 726	2 961 959	35,89	37,31	65,66
75	Nigeria	131 728	88 257	104 723	38,43	32,52	3,47
76	Russia	144 308	138 536	932 229	41,22	40,27	33,14
77	Brazil	183 960	160 045	1 218 734	44,77	43,70	39,72
78	Indonesia	223 070	198 532	591 358	49,07	47,95	22,85
79	United States	290 343	284 536	8 595 591	54,67	54,04	100,00
80	India	1 057 504	856 579	2 196 437	75,08	72,36	57,59
81	China	1 291 496	1 291 496	4 010 095	100,00	100,00	76,58

Źródło: obliczenia własne.

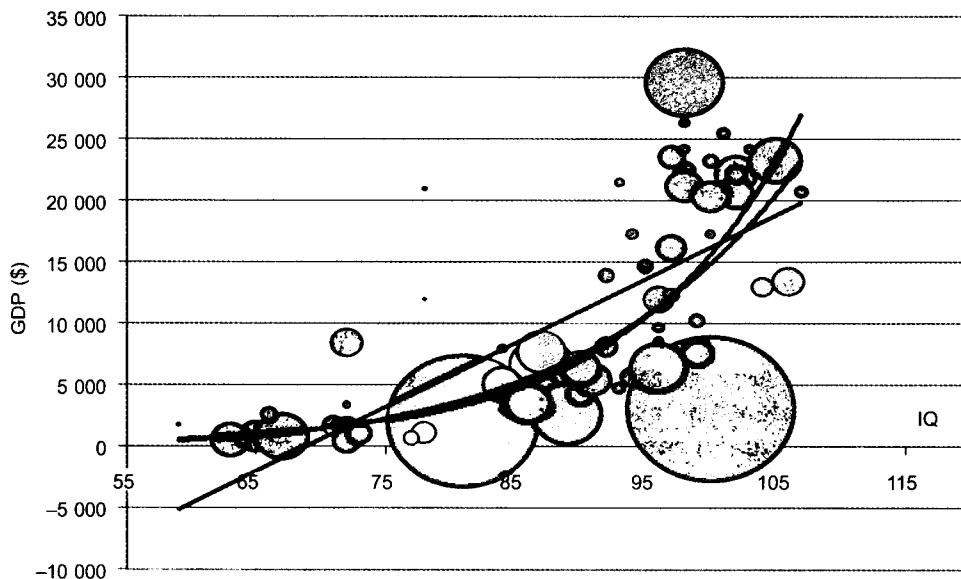
wskutek czego kumulanty zmiennych [IQ\*LUD] i [GDP\*LUD] wskazują na inną kolejność krajów. Zmienną [IQ\*LUD] można interpretować jako całkowity zasób kapitału intelektualnego znajdującego się w dyspozycji danego kraju, natomiast zmienną [GDP\*LUD] jako całkowity zasób produktu narodowy brutto w tym kraju.

Jak można zauważyć z tabeli 3 łączna liczba mieszkańców połowy (50%) najmniejszych krajów wyczerpuje zaledwie 5% populacji wszystkich analizowanych krajów. Podobnie jest z zasobem kapitału intelektualnego [IQ\*LUD]. Z drugiej strony liczba mieszkańców samych tylko Chin odpowiada skumulowanej liczbie mieszkańców 67 krajów spośród 81, a zasób kapitału intelektualnego Chin jest taki jak kapitał 70 mniejszych krajów. Liczba mieszkańców i kapitał intelektualny dwóch największych krajów — Chin i Indii odpowiada prawie połowie zasobów tych zmiennych w całym analizowanym zbiorze krajów.



Kumulanty liczby ludności i kapitału intelektualnego praktycznie się pokrywają ( $r = 0,99$ ) natomiast kumulanta całkowitego produktu narodowego [GDP\*LUD] kształtuje się nieco inaczej niż poprzednie dwie kumulanty. Wynika to stąd, że największe udziały w zakresie [GDP\*LUD] mają Stany Zjednoczone (30% ogólnej sumy), a nie Chiny (14,2%) czy Indie (7,7%). Ponadto dochodzi tu jeszcze Japonia (10% potencjału gospodarczego wobec 2,5% udziału w liczbie ludności oraz 4% udziału w zasobie kapitału intelektualnego).

Zróżnicowane wielkości krajów powodują, że uzasadnionym wydaje się zaproponowanie zmodyfikowanej formuły wyznaczania miar zależności. Na rycinie 5 przedstawiono bąbelkowy diagram rozrzutu wraz z wszystkimi trzema funkcjami regresji. Średnica poszczególnych okręgów(krajów) jest tu proporcjonalna do liczby ludności [LUD]. Wykres ten lepiej oddaje istotę rozpatrywanej zależności i sugeruje uwzględnienie wielkości obiektów w trakcie wyznaczania miar korelacji i regresji.



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 5. Bąbelkowy diagram rozrzutu pomiędzy GDP a IQ wraz z funkcjami regresji

#### 4. PROPOZYCJE ZMODYFIKOWANYCH MIERNKÓW WSPÓŁZALEŻNOŚCI

Zgodnie z dotychczas stosowanym podejściem w analizie zależności w większości badań empirycznych współczynnik korelacji liniowej wyznaczany jest według następującego wzoru:

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{s_X \cdot s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2}{n}\right)}}, \quad (1)$$

gdzie  $\text{cov}(X, Y)$  to kowariancja pomiędzy zmiennymi  $X$  i  $Y$  natomiast  $s_X, s_Y$  to ich odchylenia standardowe.

W omawianym przykładzie zmienną  $Y$  jest wskaźnik produktu narodowego brutto (GDP), natomiast zmienną  $X$  — średni iloraz inteligencji (IQ). Wzór (1) można przekształcić w ten sposób, że przy każdym jego elemencie pojawi się waga  $F_i$  (równa liczbie ludności dla  $i$ -tego kraju — LUD).

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n F_i X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n F_i X_i\right) \left(\sum_{i=1}^n F_i Y_i\right)}{\sum_{i=1}^n F_i}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n F_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n F_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n F_i Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n F_i Y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n F_i}\right)}}. \quad (2)$$

Aby przybliżyć interpretację współczynnika danego wzorem (2) należy zauważyć, że mierzy on zależność pomiędzy kapitałem intelektualnym a potencjałem gospodarczym w sytuacji, w której jednostkami obserwacji są wszystkie osoby (a nie kraje) zamieszkałe w analizowanych 81 krajach, przy czym wszyscy mieszkańcy danego kraju mają jednakowy (na średnim poziomie) iloraz inteligencji oraz są twórcami jednakowego (na średnim poziomie) produktu narodowego brutto.

Inną propozycją jest wyznaczenie współczynnika korelacji liniowej pomiędzy zmiennymi  $[IQ \cdot LUD]$  oraz  $[GDP \cdot LUD]$ , co sprowadza się do następującej formuły:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i X_i)(F_i Y_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (F_i X_i)\right) \left(\sum_{i=1}^n (F_i Y_i)\right)}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (F_i X_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (F_i X_i)\right)^2}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n (F_i Y_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (F_i Y_i)\right)^2}{n}\right)}}, \quad (3)$$

względnie do formuły zmodyfikowanej, w której przez liczbę obserwacji rozumie się sumę wszystkich realizacji zmiennej wykorzystywanej w charakterze wag  $F$ :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i X_i)(F_i Y_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (F_i X_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n (F_i Y_i)\right)}{\sum_{i=1}^n F_i}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (F_i X_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (F_i X_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^n F_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n (F_i Y_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (F_i Y_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^n F_i}\right)}}. \quad (4)$$

Analogicznie do przedstawionych powyżej wzorów można podać cztery różne formuły służące do wyznaczania parametrów liniowej funkcji regresji  $Y = f(X)$ . Zebrano je w tabeli 4.

Tabela 4

Wzory na nieważone (1) i ważone (2)–(4) parametry liniowej funkcji regresji

Wzór	Współczynnik kierunkowy	Wyraz wolny
(1)	$b = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}$	$a = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
(2)	$b = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \sum_{i=1}^n F_i X_i Y_i - \sum_{i=1}^n F_i X_i \sum_{i=1}^n F_i Y_i}{\sum_{i=1}^n F_i \sum_{i=1}^n F_i X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n F_i X_i\right)^2}$	$a = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i Y_i)}{\sum_{i=1}^n F_i} - b \frac{\sum_{i=1}^n (F_i X_i)}{\sum_{i=1}^n F_i}$
(3)	$b = \frac{n \sum_{i=1}^n (F_i X_i)(F_i Y_i) - \sum_{i=1}^n (F_i X_i) \sum_{i=1}^n (F_i Y_i)}{n \sum_{i=1}^n (F_i X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n (F_i X_i)\right)^2}$	$a = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i Y_i)}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n (F_i X_i)}{n}$
(4)	$b = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \sum_{i=1}^n (F_i X_i)(F_i Y_i) - \sum_{i=1}^n (F_i X_i) \sum_{i=1}^n (F_i Y_i)}{\sum_{i=1}^n F_i \sum_{i=1}^n (F_i X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n (F_i X_i)\right)^2}$	$a = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i Y_i)}{\sum_{i=1}^n F_i} - b \frac{\sum_{i=1}^n (F_i X_i)}{\sum_{i=1}^n F_i}$

Źródło: obliczenia własne.

Wartości współczynników regresji oraz korelacji liniowej wyznaczone za pomocą powyższych wzorów przedstawiono w tabeli 5. Jak można zauważyć ważone miary zależności (2) dają nieco inne rezultaty aniżeli standardowe miary nieważone (1). Współczynnik korelacji zmniejszył się z 0,73 do 0,48. Również zmniejszyły się parametry linowej funkcji regresji — współczynnik kierunkowy z 519 \$ GDP/os/rok do 369 \$ GDP/os/rok i podobnie wyraz wolny, z -35717 \$ GDP do -26216 \$ GDP.

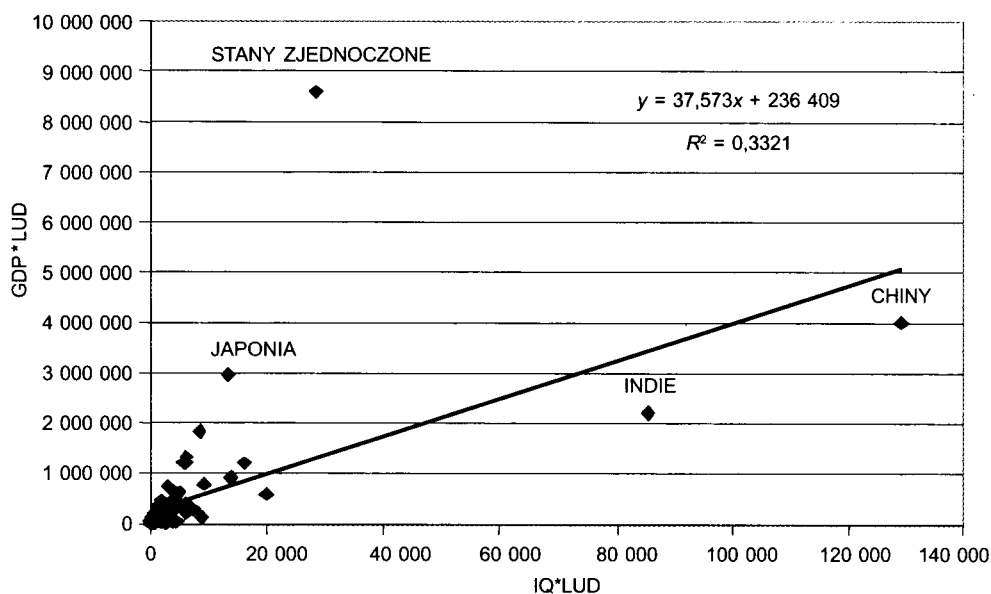
Tabela 5

Ważone parametry regresji i współczynniki korelacji pomiędzy GDP a IQ

Wzór	Współczynnik $a$	Współczynnik $b$	Współczynnik $r$
(1)	-35 717	519	0,733
(2)	-26 215	369	0,481
(3)	236 409	38	0,576
(4)	3 326	42	0,625

Źródło: obliczenia własne.

Miary zależności opisane za pomocą trzeciej i czwartej formuły dają odmiennie rezultaty. Jak wynika z ryciny 6 kształt diagramu rozrzutu dla zmiennych [IQ\*LUD] oraz [GDP\*LUD] determinują 3–4 kraje: Chiny, Stany Zjedno-



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 6. Diagram rozrzutu wraz z liniową funkcją regresji pomiędzy zmiennymi GDP\*LUD oraz IQ\*LUD

czone, Indie oraz Japonia i one decydują o ocenie kierunku oraz sile zależności pomiędzy potencjałem intelektualnym a bogactwem. Pozostałe kraje tworzą jedno skupisko zgrupowane w pobliżu początku układu współrzędnych (0, 0). „Wartość” jednostkowa kapitału intelektualnego spada tu z 369–519 \$ do 38–42 \$ GDP na 1 osobę w ciągu roku.

## BIBLIOGRAFIA

- Herrnstein R., Murray Ch. 1994. *The Bell Curve: Intelligence and Class Structure in American Life*, Free Press 1994.
- [http://www.amren.com/ar/2002/12/ The Global Bell Curve. Uncommon sense on wealth and poverty, reviewed by Thomas Jackson.](http://www.amren.com/ar/2002/12/The_Global_Bell_Curve.Uncommon_sense_on_wealth_and_poverty,_reviewed_by_Thomas_Jackson.)
- [http://www.census.gov/ipc/www/idb/tables.html.](http://www.census.gov/ipc/www/idb/tables.html)
- [http://www.lagriffedulion.f2s.com/sft.htm.](http://www.lagriffedulion.f2s.com/sft.htm)
- Human Development Report 2000*. 2000. United Nations Development Programme (UNDP), Oxford University Press, New York.
- Jensen A.R. 1998. *The g Factor*, Praeger, Westport (CT).
- Landes D.S. 1998. *The Wealth and Poverty of Nations: Why Some Are So Rich and Some So Poor*, W.W. Norton & Company, New York.
- Lynn R. 2008. *The Global Bell Curve*, Augusta, GA: Washington Summit Publisher, 2008.
- Lynn R., Vanhanen T. *IQ and the Wealth of Nations*. Westport, CT Praeger, 2002.
- Lynn R., Vanhanen T. *IQ and Global Inequality*. Washington Summit Publishers (GA), Augusta.
- Rushton J.P. 2000. *Race, Evolution, and Behavior: A Life History Perspective*, Charles Darwin Research Institute (MI), Port Huron.